4 机器人运动控制算法研究

本章采用 LQR 算法设计了轮式运动控制器，采用 VMC 算法设计了腿部运动控制器。设计过程均是先根据第二章推导出的动力学方程建立控制模型，再使用 Simulink 搭建控制方框图进行仿真计算，根据仿真结果调整控制参数，最后分析本系统在该参数下的控制效果。对于因腿部运动导致重心高度发生变化的非线性情况，则是采用区间插值的方法，将重心高度分为三个区间，不同区间采用不同的 LQR 反馈参数，同一区间使用相同的参数，保障机器人在各个高度下均能实现良好的控制效果。

4.1 机器人轮式运动控制

4.1.1 基于状态空间的控制模型

将式（2.19）和式（2.22）化简为以下形式：

$$\begin{cases} a\ddot{x} = (T_R + T_L) - b\ddot{\theta} \\ c\ddot{\theta} = d\theta - e\ddot{x} - (T_R + T_L) \\ \ddot{\delta} = f(T_L - T_L) \end{cases} \tag{4.1}$$

其中：

$$\begin{cases} a = r(M + 2m + \frac{2I}{r^2}) \\ b = Mrl \\ c = J_z + Ml^2 \\ d = Mgl \\ e = Ml \\ f = \frac{1}{r(mD + \frac{ID}{r^2} + \frac{2J_y}{D})} \end{cases} \tag{4.2}$$

状态空间的表达形式为：

$$\dot{Z} = AZ + B\mu \tag{4.3}$$

选取状态变量：

$$Z = [x\ \dot{x}\ \theta\ \dot{\theta}\ \delta\ \dot{\delta}]^T \tag{4.4}$$

将式（4.1）转化为以下形式的方程组：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{-bd}{ac-be}\theta + \frac{c+b}{ac-be}(T_R + T_L) \\ \ddot{\theta} = \frac{ad}{ac-be}\theta - \frac{e+a}{ac-be}(T_R + T_L) \\ \ddot{\delta} = f(T_L - T_R) \end{cases} \tag{4.5}$$

将式（4.5）用状态空间表示：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} \\ 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ T_R \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

其中：

$$\begin{cases} A_{23}=\frac{-bd}{ac-be} \\ A_{43}=\frac{ad}{ac-be} \\ B_{21}=B_{22}=\frac{c+b}{ac-be} \\ B_{41}=B_{42}=-\frac{e+a}{ac-be} \\ B_{61}=f，B_{62}=-f \end{cases} \tag{4.7}$$

基于 SolidWorks 模型，当关节电机角度为 150° 时测量得到各物理量参数如表 4-1 所示：

表 4-1 各物理量的测量参数

参数符号	参数值	参数单位
m	1.5	kg
M	6	kg
r	0.074	m
I	2788.825×10^{-6}	kg· m^2
l	0.1	m
J_Z	153013.57×10^{-6}	kg· m^2
g	9.8	m/s²
J_y	182050.38×10^{-6}	kg· m^2
D	0.523	m

将表 4-1 中的数据代入式（4.6）中，在 Matlab 中计算得到（代码见 two_wheel_model.m）：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&-1.9886&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&33.2053&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0&0\\1.9608&1.9608\\0&0\\-10.2174&-10.2174\\0&0\\7.7351&-7.7351\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

对本系统的可控性进行判断，已知 $A\in R^{6\times 6}$，$B\in R^{6\times 2}$，构造 Co 矩阵：

$$Co=[B\ AB\cdots\cdots A^{n-1}B]，Co\in R^{6\times 12} \tag{4.9}$$

若 Co 矩阵为满秩矩阵，则系统可控。经计算 $Rank(Co)=6$，由此可得本系统是可控的。

对系统的稳定性进行分析，计算得到 A 矩阵的特征值为：

$$\lambda=[0\ \ 0\ \ 5.7624\ \ -5.7624\ \ 0\ \ 0]^T \tag{4.10}$$

因为特征值中存在正数，所以本系统不稳定，需要设计控制器使系统稳定。

4.1.2 LQR 控制器设计及 Simulink 仿真

设定一个反馈矩阵 K：

$$K=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

令$\mu =- KZ$，则$\dot{Z}=AZ-BKZ=(A-BK)Z$，将 $A-BK$ 命名为A_{cl}矩阵。通过改变反馈矩阵 K 的各项参数，使A_{cl}矩阵的特征值全部非正，从而使系统稳定。

关于如何配置极点使系统性能最优，对此 LQR 控制器引入了代价函数：

$$J=\int_0^{\infty}(Z^T QZ+\mu^T R\mu)dt \tag{4.12}$$

目的是通过调节状态反馈控制器$\mu =- KZ$，使代价函数取得最小值J_{min}。Q 和 R 即是需要设计的半正定矩阵和正定矩阵，Q 矩阵表示对于状态变量 Z 的惩罚，R 矩阵表示对于输入量μ的惩罚。Q 矩阵的某一分量值越大，则该分量对应的状态变量以更快的速度衰减至 0，R 矩阵的分量则是限制对应输入量μ的大小。

反馈矩阵 K 的计算公式如下：

$$K=R^{-1}B^T P \tag{4.13}$$

其中 P 矩阵由 Riccati 方程解得：

$$A^T P+PA+Q-PBR^{-1}B^T P=0 \tag{4.14}$$

本课题所设计的 Q 矩阵和 R 矩阵如下：

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ R=\begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

计算得到的反馈矩阵 K 为：

$$K=\begin{bmatrix} -0.0224 & -2.2554 & -10.1436 & -1.5177 & 2.2361 & 0.5377 \\ -0.0224 & -2.2554 & -10.1436 & -1.5177 & -2.2361 & -0.5377 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

在 Simulink 中搭建轮式运动的仿真控制模型（见 two_wheel_model_control.slx），如图 4-1 所示：

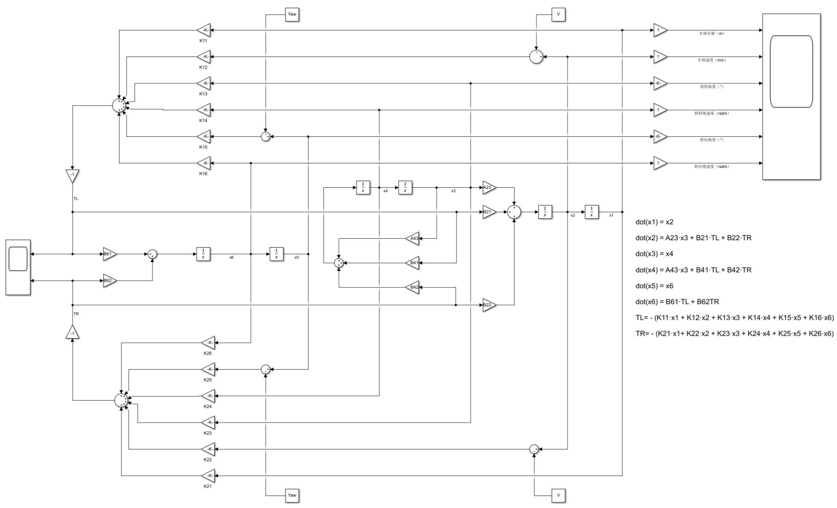

图 4-1 轮式运动的 Simulink 仿真控制模型

将式（4.16）的反馈矩阵参数代入仿真模型中，设定初始俯仰角为 20°，模拟机器人从远离平衡点的起始位置回到平衡点的过程，各状态变量的仿真结果如图 4-2 所示，各输入量的仿真结果如图 4-3 所示：

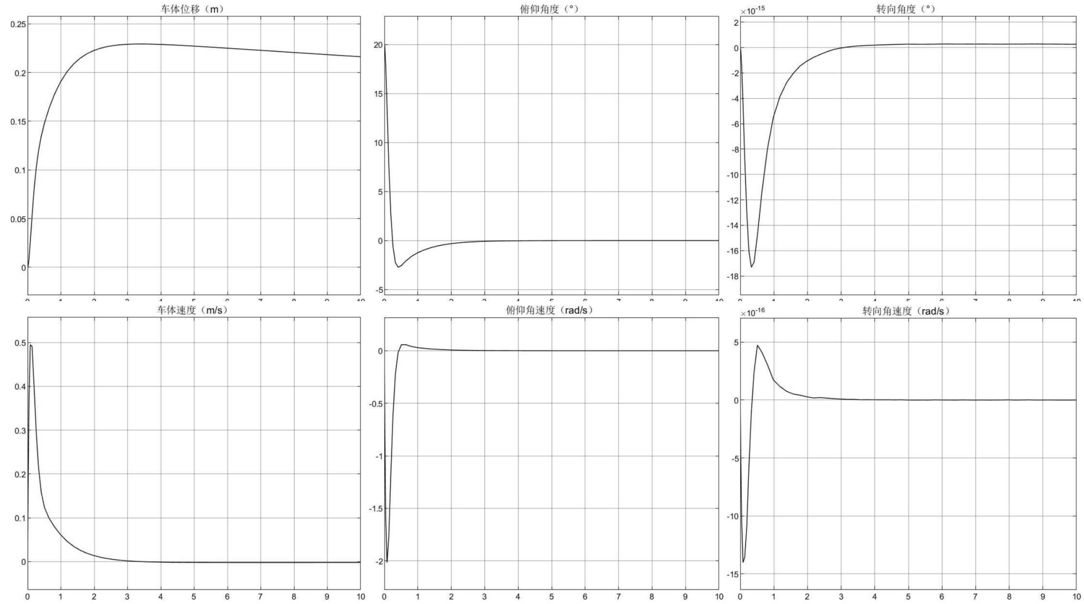

图 4-2 初始俯仰角 20° 时各状态变量的仿真结果

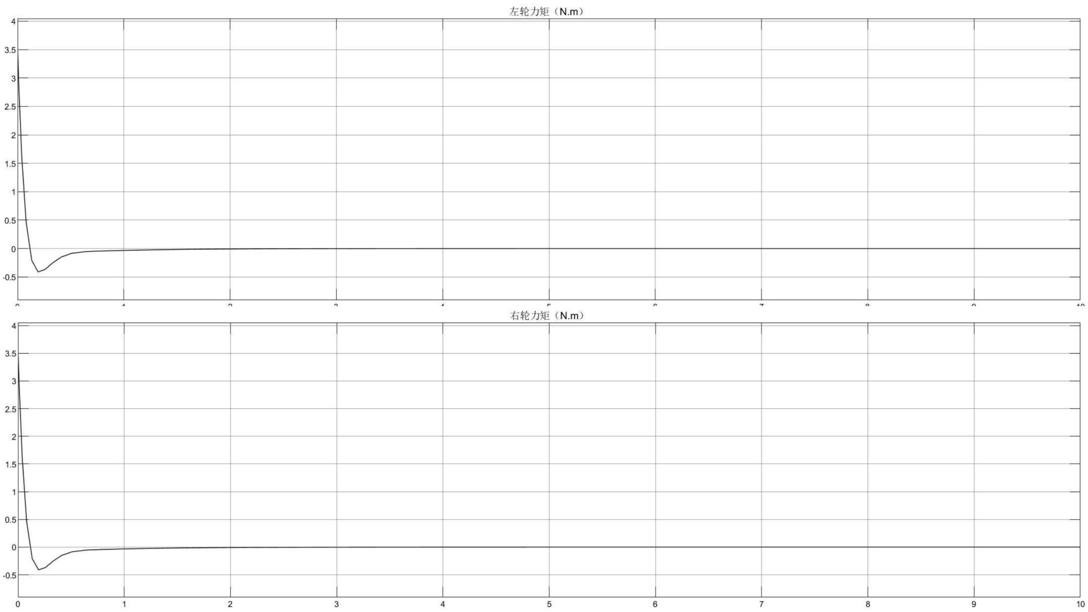

图 4-3 初始俯仰角 20° 时各输入量的仿真结果

从图中可以看出，机器人在 1 秒左右回到平衡点并保持平衡状态，此过程中的车体位移在 0.2m 左右，同时对转向运动的影响非常小。左右驱动轮所需的回复力矩不超过 3.5N·m，在所选电机的峰值扭矩范围内，满足实际要求。

设定目标速度为 1.5m/s，模拟机器人的速度跟踪过程，各状态变量的仿真结果如图 4-4 所示，各输入量的仿真结果如图 4-5 所示：

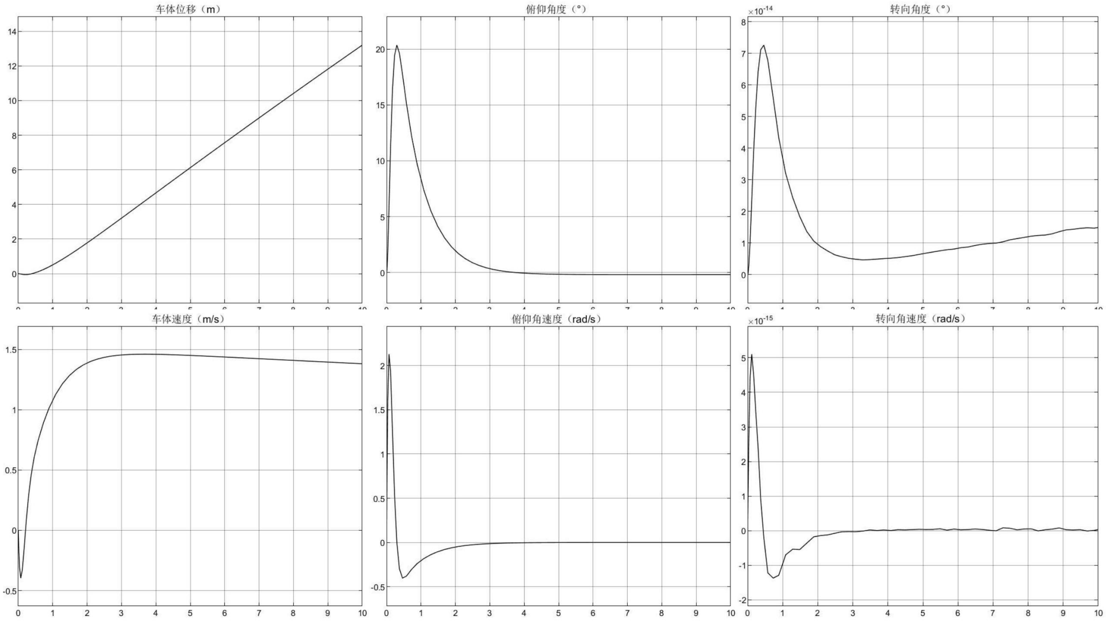

图 4-4 目标速度 1.5m/s 时各状态变量的仿真结果

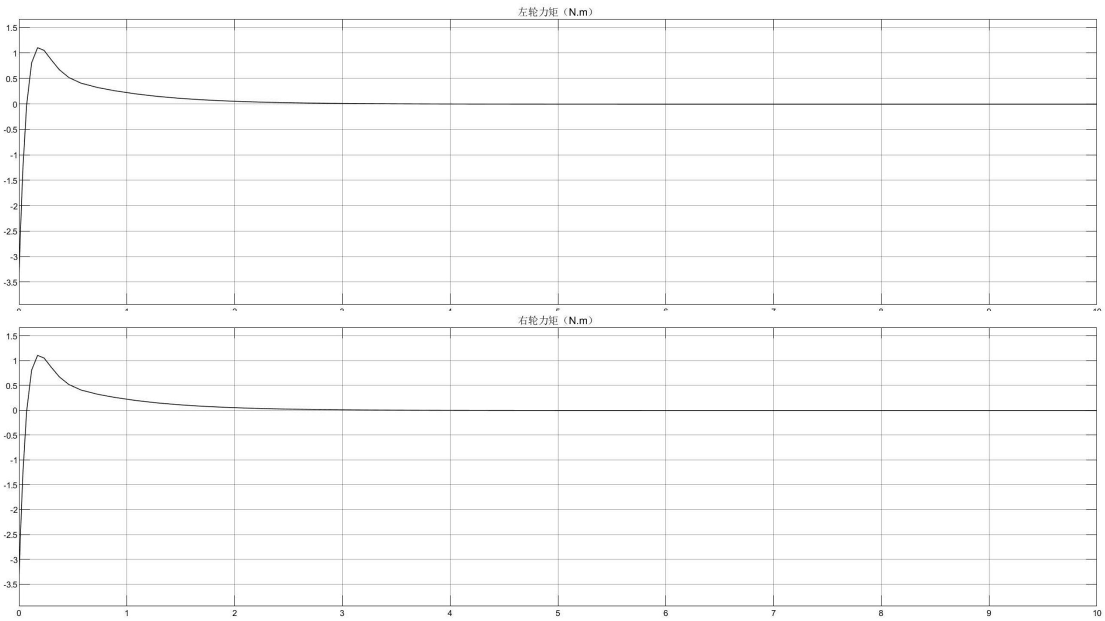

图 4-5 目标速度 1.5m/s 时各输入量的仿真结果

从图中可以看出，机器人在 2 秒左右达到 1.5m/s 的目标速度，此过程中机器人的最大俯仰角为 20°，在俯仰角的最大限制范围内，同时对转向运动的影响非常小。左右驱动轮的最大力矩为 3N·m，在所选电机的峰值扭矩范围内，满足实际要求。

设定目标转向角度为 30°，模拟机器人的转向跟踪过程，各状态变量的仿真结果如图 4-6 所示，各输入量的仿真结果如图 4-7 所示：

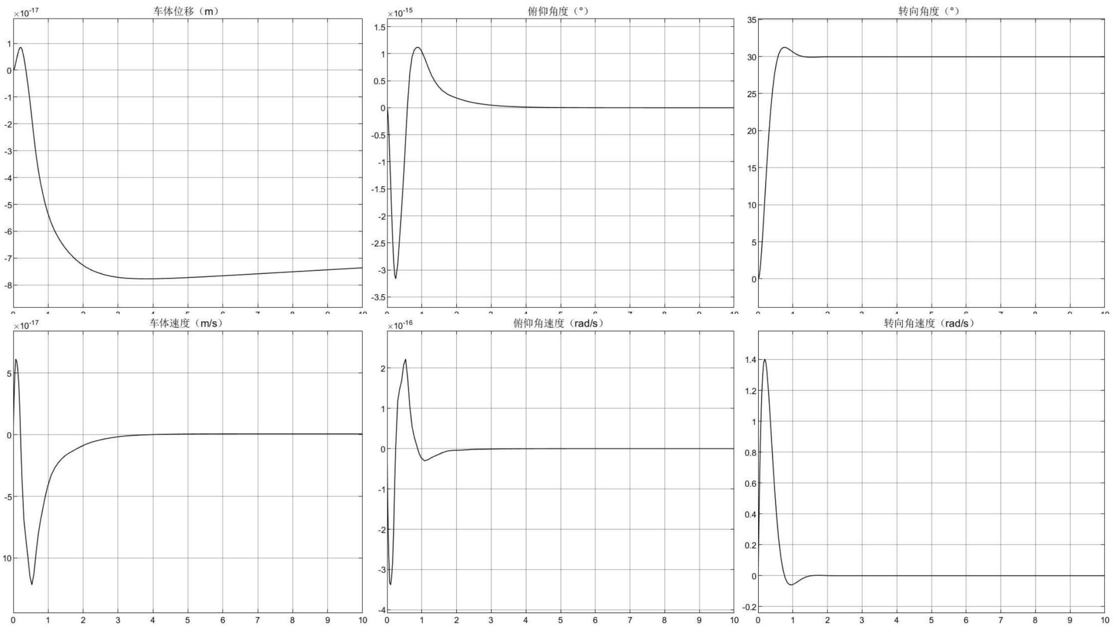

图 4-6 目标转向角度 30° 时各状态变量的仿真结果

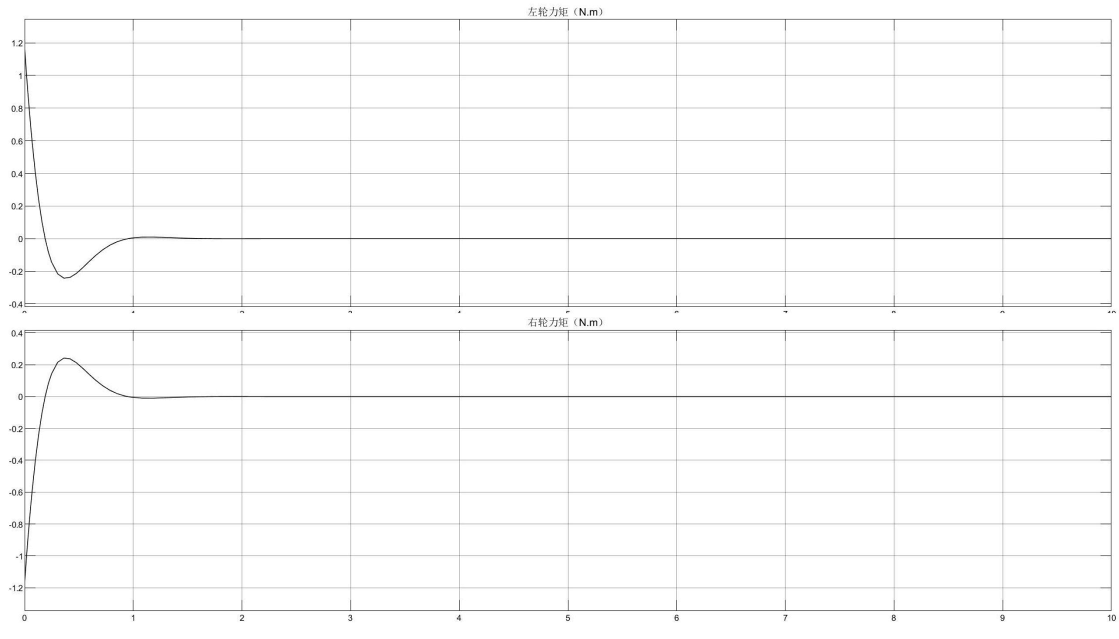

图 4-7 目标转向角度 30° 时各输入量的仿真结果

从图中可以看出，机器人在 1 秒左右到达目标转向角度，此过程对于机器人的速度和俯仰角度等状态变量的影响非常小。左右驱动轮的最大力矩为 1.2N·m，在所选电机的峰值扭矩范围内，满足实际要求。