

## 2 机器人动力学建模

轮腿式双足机器人的全身运动可解耦为轮式运动和腿部运动。轮式运动包括平面运动（机体平衡、前后移动）和转向运动。腿部运动包括跳跃运动、高度调节运动以及地面自适应运动。本章主要对上述各运动过程进行动力学建模，找到各物理量之间的数学关系，以便后续进行控制器设计和关节电机选型。

### 2.1 轮式运动

对于机器人的轮式运动，可做出如下理想化假设：①机体质量等效集中于质心位置。②忽略腿部运动对于轮式运动的影响。③忽略腿部连杆的质量。④驱动轮与地面是无滑动的滚动摩擦。

基于上述理想化假设，可将轮腿式双足机器人的轮式运动等效简化为摆长可变的双轮倒立摆模型，如图 2-1 所示，图中各项物理参数见表 2-1。

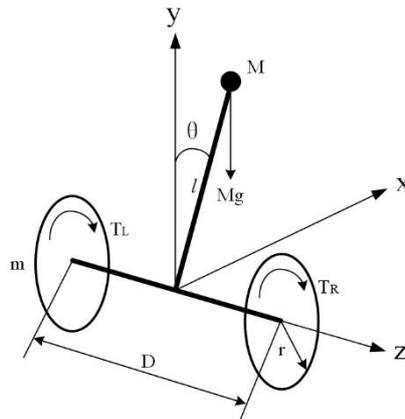


图 2-1 双轮倒立摆模型

表 2-1 双轮倒立摆模型各物理参数

参数符号	参数含义	参数单位
$M$	机体质量	kg
$m$	驱动轮质量	kg
$l$	机体质心与轮轴的距离	m
$r$	驱动轮半径	m
$D$	左右驱动轮之间的距离	m
$g$	重力加速度	$\text{m/s}^2$
$\theta$	机体的俯仰倾角	rad
$\dot{\theta}$	机体的俯仰角速度	rad/s
$\ddot{\theta}$	机体的俯仰角加速度	$\text{rad/s}^2$
$T_L, T_R$	左、右轮的驱动力矩	$\text{N} \cdot \text{m}$
$N_L, N_R$	机体与左、右轮在 x 方向的相互作用力	N
$P_L, P_R$	机体与左、右轮在 y 方向的相互作用力	N

$F_L, F_R$	左、右轮与地面的摩擦力	N
$x_L, x_R$	左、右轮的轮轴位移	m
$\dot{x}_L, \dot{x}_R$	左、右轮的轮轴速度	m/s
$\ddot{x}_L, \ddot{x}_R$	左、右轮的轮轴加速度	m/s <sup>2</sup>
$\omega_L, \omega_R$	左、右轮的旋转角速度	rad/s
$\dot{\omega}_L, \dot{\omega}_R$	左、右轮的旋转角加速度	rad/s <sup>2</sup>
$I$	驱动轮绕轮轴的转动惯量	kg · m <sup>2</sup>
$J_z$	机体绕 z 轴的转动惯量	kg · m <sup>2</sup>
$J_y$	机体绕 y 轴的转动惯量	kg · m <sup>2</sup>
$J_x$	机体绕 x 轴的转动惯量	kg · m <sup>2</sup>
$\delta$	机体的航向角度	rad
$\dot{\delta}$	机体的航向角速度	rad/s
$\ddot{\delta}$	机体的航向角加速度	rad/s <sup>2</sup>
$F_y$	机体在 y 方向的虚拟力	N
$T_x$	机体绕 x 轴的虚拟力矩	N · m
$y$	机体质心在 y 方向上与轮轴的距离	m
$\dot{y}$	机体质心在 y 方向上的速度	m/s
$\ddot{y}$	机体质心在 y 方向上的加速度	m/s <sup>2</sup>
$\beta$	机体的翻滚角度	rad
$\dot{\beta}$	机体的翻滚角速度	rad/s
$\ddot{\beta}$	机体的翻滚角加速度	rad/s <sup>2</sup>
$\tau$	左侧关节电机力矩	N · m

### 2.1.1 平面运动的动力学模型

将双轮倒立摆模型分为左右驱动轮和机体两部分，分别对这两部分进行受力分析。左驱动轮的简化模型如图 2-2 所示，图中各项物理参数见表 2-1。

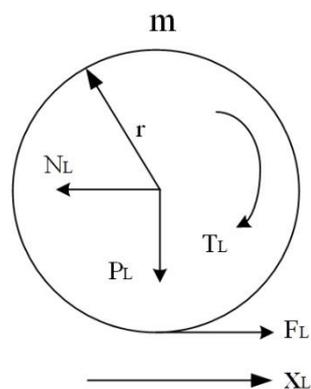


图 2-2 左驱动轮简化模型

左驱动轮在 x 方向的力平衡方程:

$$m\ddot{x}_L = F_L - N_L \quad (2.1)$$

左驱动轮绕轮轴的力矩平衡方程:

$$I\dot{\omega}_L = T_L - F_L r \quad (2.2)$$

式 (2.1) 和式 (2.2) 联立得:

$$I\dot{\omega}_L = T_L - r(m\ddot{x}_L + N_L) \quad (2.3)$$

驱动轮旋转角加速度与轮轴加速度的关系式:

$$\dot{\omega}_L = \frac{\ddot{x}_L}{r} \quad (2.4)$$

将式 (2.4) 代入式 (2.3) 并整理得到左驱动轮动力学方程:

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}_L = \frac{T_L}{r} - N_L \quad (2.5)$$

同理得到右驱动轮的动力学方程:

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x}_R = \frac{T_R}{r} - N_R \quad (2.6)$$

机体加速度是左右轮轴加速度的平均:

$$\ddot{x} = \frac{\ddot{x}_L + \ddot{x}_R}{2} \quad (2.7)$$

综合式 (2.5)、(2.6) 和 (2.7) 得到:

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{2r} - \frac{N_L + N_R}{2} \quad (2.8)$$

机体部分视作 x-y 平面内的倒立摆, 如图 2-3 所示, 图中各项物理参数见表 2-1。

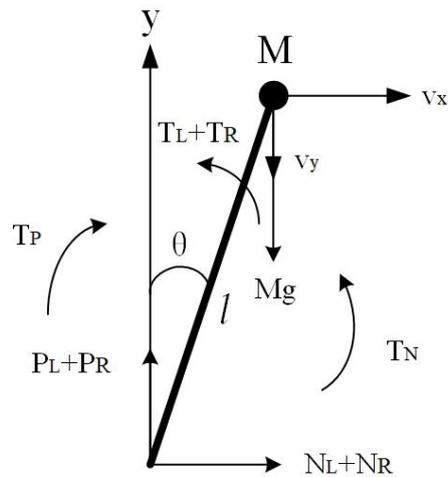


图 2-3 机体倒立摆模型

以机体质心作为对象进行受力分析，将 $N_L + N_R$ 和 $P_L + P_R$ 平移至质心处，会产生附加力偶 $T_N$ 和 $T_P$ ：

$$T_N = (N_L + N_R)l\cos\theta, T_P = (P_L + P_R)l\sin\theta \quad (2.9)$$

质心的绝对速度分解为 $v_x$ 和 $v_y$ ：

$$v_x = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta, v_y = l\dot{\theta}\sin\theta \quad (2.10)$$

质心在 x 方向的力平衡方程：

$$M\dot{v}_x = N_L + N_R \quad (2.11)$$

将式 (2.10) 代入式 (2.11) 中得到：

$$M(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta) = N_L + N_R \quad (2.12)$$

质心在 y 方向的力平衡方程：

$$M\dot{v}_y = Mg - (P_L + P_R) \quad (2.13)$$

将式 (2.10) 代入式 (2.13) 中得到：

$$Mg - M(l\dot{\theta}^2\cos\theta + l\ddot{\theta}\sin\theta) = P_L + P_R \quad (2.14)$$

质心绕 z 轴的力矩平衡方程：

$$J_z\ddot{\theta} = T_P - T_N - (T_L + T_R) \quad (2.15)$$

将式 (2.9), (2.12) 和 (2.14) 代入 (2.15) 中化简得到机体部分的动力学方程：

$$(J_z + Ml^2)\ddot{\theta} = Mgl\sin\theta - M\dot{x}l\cos\theta - (T_L + T_R) \quad (2.16)$$

将式 (2.12) 代入式 (2.8) 得到完整的驱动轮动力学方程：

$$\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)\ddot{x} = \frac{(T_L + T_R)}{r} - Ml\dot{\theta}\cos\theta + Ml\dot{\theta}^2\sin\theta \quad (2.17)$$

当机体俯仰倾角较小时，即机器人在其平衡位置附近小角度范围内保持平衡，可做如下线性化处理：

$$\cos\theta = 1, \sin\theta = \theta, \dot{\theta}^2 = 0 \quad (2.18)$$

将式 (2.18) 代入式 (2.17) 和式 (2.16) 中得到线性化后的平面运动动力学方程组：

$$\begin{cases} r\left(M + 2m + \frac{2I}{r^2}\right)\ddot{x} = (T_L + T_R) - Mrl\dot{\theta} \\ (J_z + Ml^2)\ddot{\theta} = Mgl\theta - M\dot{x}l - (T_L + T_R) \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.1.2 转向运动的动力学模型

机体转向是由两轮差速运动实现，其简化模型如图 2-4 所示，图中各物理参数见表 2-1。

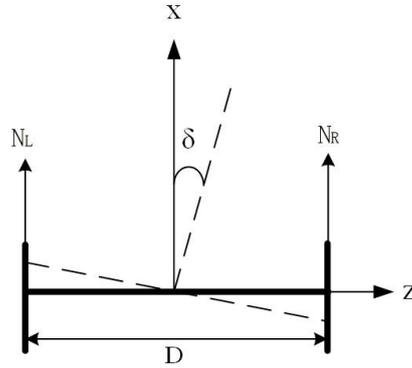


图 2-4 转向运动的简化模型

机体绕  $y$  轴的力矩平衡方程：

$$J_y \ddot{\delta} = (N_L - N_R) \frac{D}{2} \quad (2.20)$$

机体的航向角加速度与左右轮轴加速度的关系：

$$\ddot{\delta} = \frac{x_L - x_R}{D} \quad (2.21)$$

将式 (2.20) 和 (2.21) 代入式 (2.8) 中整理得到转向运动的动力学方程：

$$\ddot{\delta} = \frac{T_L - T_R}{r(mD + \frac{I_D}{r^2} + \frac{2J_y}{D})} \quad (2.22)$$

## 2.2 腿部运动

本课题将轮腿式双足机器人的腿部运动分为支撑相和跳跃相两种情形分别进行动力学建模。支撑相情形下左右驱动轮在腿部运动的过程中始终保持与地面接触，此时腿部连杆运动速度相对较慢，且左右腿部连杆在伸缩运动结束后会稳定在目标状态保持静止，高度调节运动和地面自适应运动均属于支撑相。跳跃相则是指机器人跳跃运动过程，此情形下机器人的驱动轮在起跳后会离开地面，跳跃过程中腿部连杆以很快的速度进行伸长再收缩运动。

对于机器人的腿部运动，做出如下理想化假设：①机体质量等效集中于质心位置。②忽略轮式运动对于腿部运动的影响。③忽略腿部连杆的质量。④腿部运动过程中，机器人始终保持平衡状态，即俯仰倾角始终为零。⑤同一侧的两个关节电机响应同步，控制力矩大小相等，方向相反。

### 2.2.1 支撑相的动力学模型

基于上述基本假设，并将腿部五连杆等效为一根长度会随关节电机角度变化的刚性杆，建立支撑相的静力学模型，如图 2-5 所示，图中各项物理参数见表 2-1。

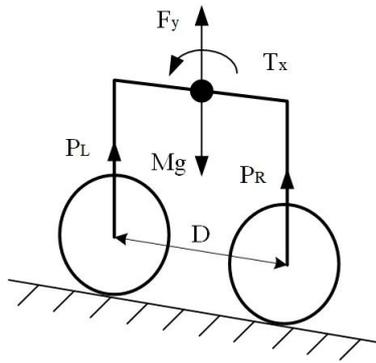


图 2-5 支撑相的静力学模型

在  $y$  方向上的力平衡方程:

$$F_y = P_L + P_R - Mg \quad (2.23)$$

机体绕  $x$  轴的力矩平衡方程:

$$T_x = (P_L - P_R) \frac{D}{2} \quad (2.24)$$

$F_y$  是机体在  $y$  方向上的虚拟力, 用于控制腿部高度调节运动, 此虚拟力为机体提供  $y$  方向上的加速度:

$$F_y = \ddot{y}M \quad (2.25)$$

$T_x$  是机体绕  $x$  轴的虚拟力矩, 用于控制腿部地面自适应运动, 此虚拟力矩为机体提供绕  $x$  轴的翻滚角加速度:

$$T_x = J_x \ddot{\beta} \quad (2.26)$$

将式 (2.23) 和式 (2.24) 联立求解得到:

$$\begin{cases} P_L = \frac{F_y - Mg}{2} + \frac{T_x}{D} \\ P_R = \frac{F_y - Mg}{2} - \frac{T_x}{D} \end{cases} \quad (2.27)$$

根据式 (2.27) 所得到的左右腿部末端执行力  $P_L$  和  $P_R$  计算每个关节电机的力矩, 以左侧腿部为例, 建立腿部五连杆的力学模型, 如图 2-6 所示, 图中各项物理参数见表 2-1 和表 3-2。

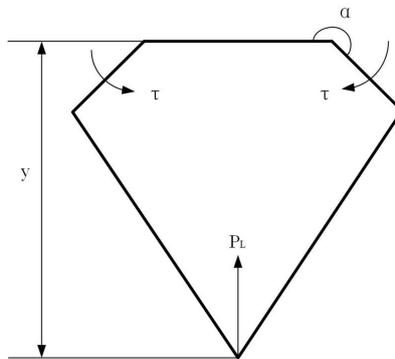


图 2-6 左侧腿部五连杆的力学模型

主动力有两个关节电机力矩 $\tau$ 和腿部末端执行力 $P_L$ ，列出虚功原理方程：

$$2\tau \cdot \delta\alpha = P_L \cdot \delta y \quad (2.28)$$

式 (3.2) 给出了机体高度  $y$  与关节电机转角  $\alpha$  的关系式，两边微分得到：

$$\delta y = - \left[ \frac{(l_1 - l_2 \cos\alpha) l_2 \sin\alpha}{\sqrt{l_3^2 - (l_1 - l_2 \cos\alpha)^2}} + l_2 \cos\alpha \right] \delta\alpha \quad (2.29)$$

将式 (2.29) 代入式 (2.28) 得到通过腿部末端执行力  $P_L$  计算关节电机力矩  $\tau$  的关系式：

$$\tau = - \left[ \frac{(l_1 - l_2 \cos\alpha) l_2 \sin\alpha}{\sqrt{l_3^2 - (l_1 - l_2 \cos\alpha)^2}} + l_2 \cos\alpha \right] \frac{P_L}{2} \quad (2.30)$$

### 2.2.2 跳跃相的动力学模型

轮腿式双足机器人的跳跃过程如图 2-7 所示。图中状态①表示初始状态，此时关节电机角度处于最小角度位置。之后关节电机快速转动，腿部连杆伸长，虚拟力  $F_y$  为机体提供一个向上的加速度  $a$  直至机器人达到状态②。状态②表示起跳状态，此时关节电机角度达到最大角度位置，机体具备一定的起跳速度  $v$ 。然后关节电机快速反向转动，腿部连杆收缩。状态③表示最高位置状态，此时关节电机角度回到最小角度位置，机器人跳跃达到最高高度  $h_{max}$ ，机体上升速度为 0， $h_{max} = h_1 + h_2$ ，其中  $h_1$  由腿部连杆的变形行程决定， $h_2$  由缩腿时间  $t$  决定， $h_2 = \frac{1}{2}gt^2$ 。

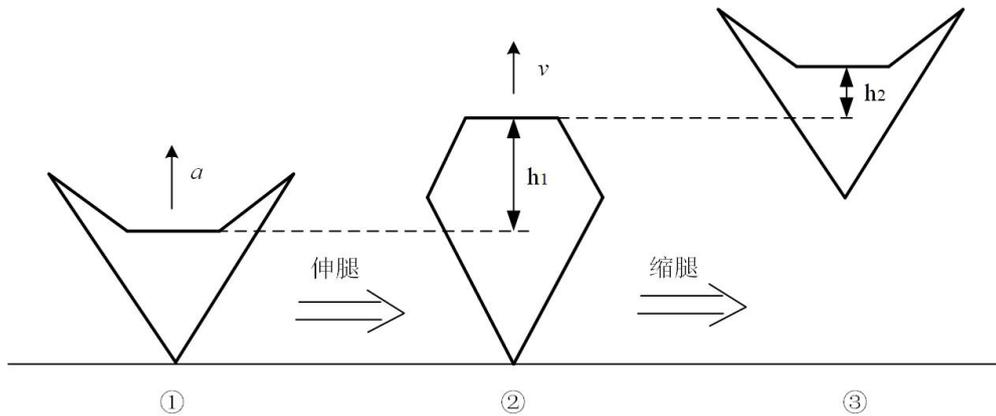


图 2-7 机器人的跳跃过程

缩腿时间  $t$  决定了起跳速度  $v$ ， $v = gt$ ，因此机器人能否起跳取决于机器人伸腿阶段结束后关节电机角度达到最大角度时机体速度  $v$  是否大于  $gt$ 。故只用对伸腿阶段进行分析即可，此阶段的动力学模型如图 2-8 所示，图中各项物理参数见表 2-1。

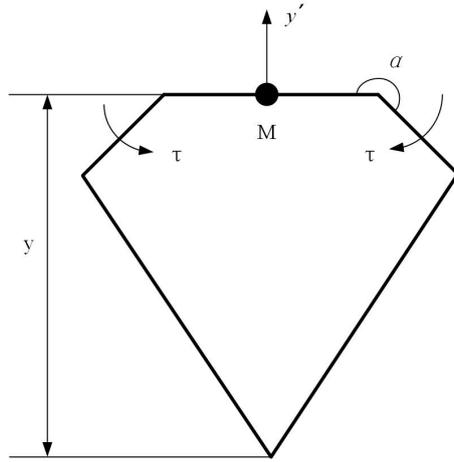


图 2-8 伸腿阶段的动力学模型

机体的动能为：

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \quad (2.31)$$

机体的势能为：

$$V = Mgy \quad (2.32)$$

拉格朗日算子：

$$L = E_k - V = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 - Mgy \quad (2.33)$$

选取关节电机转角 $\alpha$ 为广义坐标，广义力为 4 个关节电机的力矩 $\tau$ ，列出拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}} - \frac{\delta L}{\delta \alpha} = 4\tau \quad (2.34)$$

将式 (2.34) 展开化简后得到：

$$\frac{1}{4} M y_1 (y_2 \dot{\alpha}^2 + y_1 \ddot{\alpha} + g) = \tau \quad (2.35)$$

其中 $y_1$ 、 $y_2$ 的表达式如下：

$$\begin{cases} y = \sqrt{l_3^2 - (l_1 - l_2 \cos \alpha)^2} - l_2 \sin \alpha \\ y_1 = \frac{\delta y}{\delta \alpha} \\ y_2 = \frac{\delta^2 y}{\delta \alpha^2} \end{cases} \quad (2.36)$$

根据第三章中确定的杆长参数 $l_1 = 0.1$ 、 $l_2 = 0.16$ 、 $l_3 = 0.32$ ，机体质量 $M = 6kg$ ，设定缩腿时间 $t = 0.3s$ ，关节电机力矩 $\tau = 17N.m$ ，在 Matlab 中编写代码（见 `v_angle_FixedTorque.m`）求解式 (2.35) 的微分方程，并作出伸腿阶段机体上升速度随关节电机角度变化的图像，如图 2-9 所示。图中红线表示由缩腿时间得到的机体起跳速度要求，由图可知机体在关节电机角度达到最大角度时机体的上升速度高于红线，因此选用最大力矩为  $17N.m$  的 4 个关节电机能满足跳跃要求。

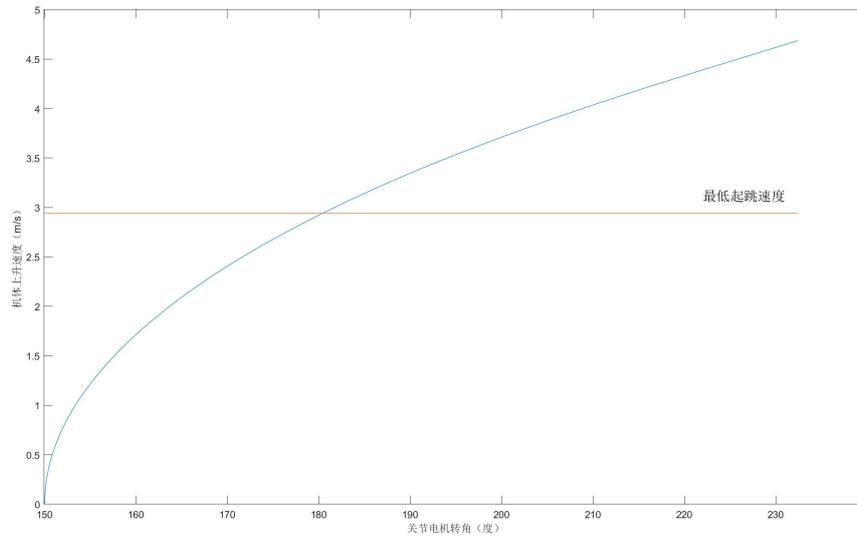


图 2-9 机体上升速度—关节电机角度关系图